

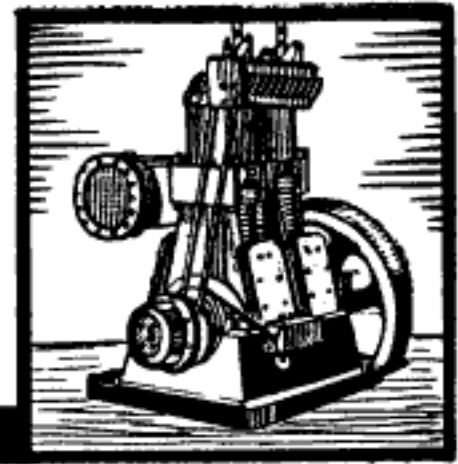


TEKNISK TIDSKRIFT

MEKANIK

REDAKTÖR: H.F. NORDSTRÖM

UTGIVEN AV SVENSKA TEKNOLOGFÖRENINGEN



INNEHÅLL: Belastningsfördelningen inom kul- och rullager vid givna yttre radial- och axialbelastningar, av civilingenjör Harald Sjövall. — En analys av prov med ställinor, av ingenjör Joel Björklund. — Om högfrekvensverktyg, av diplomingenjör E. Lundgren.

BELASTNINGSFÖRDELNINGEN INOM KUL- OCH RULLLAGER VID GIVNA YTTRE RADIAL- OCH AXIALBELASTNINGAR.

Av civilingenjör HARALD SJÖVALL.

Beräkningar rörande den statistiska fördelningen av yttre lagerbelastningar på rullkropparna vid kul- och rullager i det allmänna fallet visa sig kunna återföras till två, under givna förutsättningar universellt giltiga funktioner, här benämnda radialintegralen I_R och axialintegralen I_A . Dessa funktioner äro olika för lager med linje- och punktanläggning.

Numeriska värden på dessa funktioner äro uträknade och givna i tabellform. Genom dessa kunna vissa problem inom kul- och rullagermekaniken lösas på ett förenklat sätt. Några exempel på dylika lösningar ha lämnats, av vilka det ena visat överensstämmelsen med Stribecks för normalfallet angivna konstanter, och det andra berört beräkningen av maximala rullbelastningen vid kombinerad last på koniska rullager.

Förutsättningar.

Föreliggande matematiska utredning avser att visa ett generellt beräkningssätt för det statistiska sambandet mellan rullkropparnas laster och de totala yttre lagerbelastningarna vid kul- eller rullager av godtycklig typ. Utredningen innefattar ej utmattningsfenomenen eller de mot en viss livslängd svarande lasterna.

Lagret antages i det allmänna fallet utsatt för en yttre last av såväl radiell som axiell riktning, dvs. kombinerad last, och antages hava ett visst givet, positivt eller negativt inre lagerglapp i monterat tillstånd. Ren radial- eller axiallast bli inbegripna såsom ytterlighetsfall.

För beräkningens genomförande förutsättes att ringarna parallellförskjutas relativt varandra, och att de därvid endast deformeras lokalt vid rullkropparnas belastningspunkter. Parallellförskjutningen, som samtidigt kan ha såväl axiell som radiell riktning (ej identisk med riktningen av den kombinerade lasten), motsvarar det vanligaste, praktiska inbyggnadssättet, det nämligen vid vilket minst två lager sitta på samma axel, och lagerhusen äro fasta. Vidare förutsättes konstant tryckvinkel, α , för belastningen på rullkropparna i förhållande till ett plan vinkelrätt mot axeln.

Antalet rullkroppar har underordnad betydelse för belastningsfördelningen, vilket lätt kan konstateras,

och vilket redan STRIBECK¹ har påvisat. Därför kommer här ett integreringsförfarande att användas. Beräkningssättet blir exakt för oändligt antal men gäller approximativt för alla normalt förekommande antal rullkroppar i lagret. Härigenom kunna härledas allmängiltiga formler för sambandet mellan rullkropparnas belastningar inom lagret och de yttre lagerbelastningarna.

Oavsett vilket belastningsfall, som föreligger, är — enligt fig. 1 — deformationen resp. belastningen på rullkropparna störst på ett ställe av omkretsen. Belastningen avtager symmetriskt på ömse sidor därom till noll vid ett visst läge eller, när hela omkretsen är mer eller mindre belastad, till ett minimum diametralt motsatt maximilasten. De praktiska förutsättningarna för de olika belastningsfallen angivas i huvudsak på fig. 1 och behandlas även vidare i det följande.

På grund av att beräkningssätten bli olika måste man skilja på belastningsfallen, när "omkretsen är

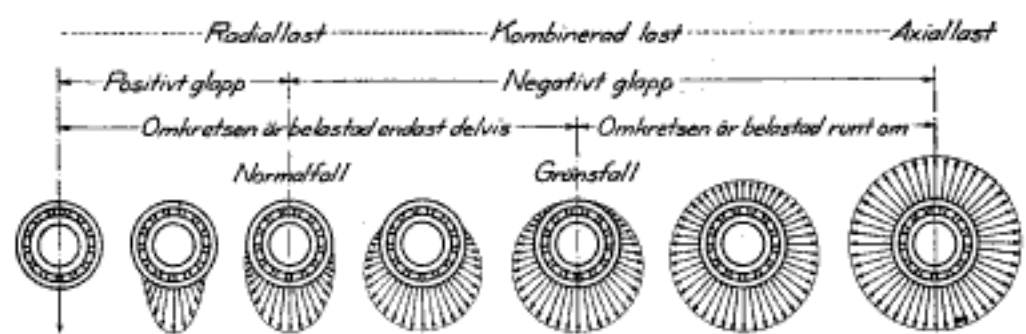


Fig. 1. Olika belastningsfall för kul- och rullager. Alternativa resp. samverkande förutsättningar för belastningsfallen.

belastad *delvis*", och när "omkretsen är belastad *runt om*". I gränsfallet mellan dessa äro alla rullkropparna utom en belastade.

Det sökta sambandet mellan lagerbelastningen och rullkropparnas belastning blir olika för lager med linjeanläggning och lager med punktanläggning. Vid linjeanläggning mellan rulle och bana blir rullbelastningen enligt HERTZ² proportionell mot deformatio-

¹ STRIBECK: Kugellager für beliebige Belastungen. Z. d. V. D. I., 1901.

² HEINRICH HERTZ: Gesammelte Werke. Leipzig, 1895.

nen, och lösningen av problemet ger relativt enkla funktioner. Vid punktanläggning däremot blir belastningen proportionell mot $3/2$ potensen av deformationen, och lösningarna till problemet visa sig vara elliptiska funktioner.

Lager med linjeanläggning i ena banan och punktanläggning i den andra intaga en mellanställning mellan de nämnda, renodlade fallen. Förhållandena vid ett sådant blandat fall böra kunna uppskattas tillräckligt noggrant med ledning av de beräknade förhållandena vid ren linje- resp. punktanläggning.

Härledning av två funktioner: I_R och I_A .

Deformationen δ_0 på den mest belastade rullkroppen, varmed här förstås den totala elastiska sammantryckningen i kontakten mellan rullkroppen och båda banorna, kan betraktas som summan av två termer, av vilka den ena, som alltid är positiv, härrör från en radiell centrumförskjutning $= e$ mellan ringarna vinkelrät mot axeln. I tryckriktningen på rullkroppen blir denna förflyttning $= e \cos \alpha$. Den andra termen, som kan vara positiv eller negativ, härrör antingen från ett radiellt glapp $= g$, dvs. ett totalt diametralt glapp $= 2g$, eller från en axialförskjutning mellan ringarna eller från båda orsakerna. I de senare fallen antages emellertid resultatet vara en deformation motsvarande ett radiellt glapp $= g$. I tryckriktningen på rullkroppen blir denna term $- g \cdot \cos \alpha$.

Om deformationen vid en godtycklig vinkel φ av omkretsen är δ , och vinkeln räknas från mest belastade rullkropp, blir:

$$\delta = \cos \alpha (e \cos \varphi - g) \dots \dots \dots (1 a)$$

För maximideformationen gäller att $\delta_0 = \cos \alpha (e - g)$ vid vinkeln $\varphi = 0$. Deformationen minskar sedan antingen till noll vid en vinkel φ , bestämd av att $\cos \varphi_1 = \frac{g}{e}$; eller när glappet g är negativt och numeriskt större än excentriciteten e , till ett minimum, varvid $\delta_{min} = \cos \alpha (-e - g)$ vid vinkeln $\varphi = \pi$ diametralt motsatt maximideformationen.

Uttrycket för deformation enligt ekv. (1a) kan omskrivas till det av tryckvinkeln α oberoende förhållandet

$$\frac{\delta}{\delta_0} = 1 - \frac{(1 - \cos \varphi)}{1 - \frac{g}{e}} \dots \dots \dots (1 b)$$

Medeltalet av de komponenter av rullkropparnas belastningar, som tillsammans utgöra radialbelastningen på lagret, bli, uttryckta i förhållande till den mest belastade rullkroppens komponent, en "radialintegral".

$$I_R = \frac{1}{\pi} \int \left[\frac{\delta}{\delta_0} \right]^m \cos \varphi d\varphi \dots \dots \dots (2)$$

Den undre integrationsgränsen är $\varphi = 0$ och den övre gränsen är den vinkel, som motsvarar noll- resp. minimilast. Exponenten m är 1 för linjekontakt och $3/2$ för punktkontakt.

Med samma gränser och exponenter blir motsvarande medeltal av rullkroppsbekastningarnas axiella komponenter i förhållande till den mest belastades en "axialintegral":

$$I_A = \frac{1}{\pi} \int \left[\frac{\delta}{\delta_0} \right]^m d\varphi \dots \dots \dots (3)$$

Med tillhjälp av dessa integraler I_R och I_A erhålles sambandet emellan belastningen P på den mest ansträngda rullkroppen och de yttre radial- och axialbelastningarna R och A .

Integralerna I_R och I_A äro funktioner enbart av g/e och ha betydelsen av dimensionslösa koefficienter. Vid linje- såväl som vid punktanläggning varierar I_R från 0 till ett maximum av ungefär 0,26 och åter till 0, under det att I_A varierar från 0 till 1.

Lösningar till ekv. 2 och 3.

För linjeanläggning bli lösningarna:

a) Omkretsen är endast delvis belastad:

$$I_R = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - \frac{g}{e}} \left[\arccos \frac{g}{e} - \frac{g}{e} \sqrt{1 - \left(\frac{g}{e}\right)^2} \right] \dots \dots \dots (4)$$

$$I_A = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 - \frac{g}{e}} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{g}{e}\right)^2} - \frac{g}{e} \arccos \frac{g}{e} \right] \dots \dots \dots (5)$$

b) Omkretsen är belastad runt om:

$$I_R = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{g}{e}} \dots \dots \dots (6)$$

$$I_A = \frac{\frac{g}{e}}{1 - \frac{g}{e}} \dots \dots \dots (7)$$

För punktanläggning bli lösningarna, om K och E beteckna fullständiga elliptiska integraler av första och andra ordningen med angiven modul de nedanstående:

a) Omkretsen är endast delvis belastad: (modul $k^2 = \frac{1 - \frac{g}{e}}{2}$)

$$I_R = \frac{1}{5\pi} \sqrt{\frac{2}{1 - \frac{g}{e}}} \left[\left(3 - \frac{g}{e}\right) K - \frac{2}{1 - \frac{g}{e}} \left[3 + \left(\frac{g}{e}\right)^2 \right] (K - E) \right] \dots \dots \dots (8)$$

$$I_A = \frac{1}{3\pi} \sqrt{\frac{2}{1 - \frac{g}{e}}} \left[\left(1 - 3\frac{g}{e}\right) K + 8 \frac{\frac{g}{e}}{1 - \frac{g}{e}} (K - E) \right] \dots \dots \dots (9)$$

b) Omkretsen är belastad runt om: (modul $k^2 = \frac{2}{1 - \frac{g}{e}}$)

$$I_R = \frac{2}{5\pi \left(1 - \frac{g}{e}\right)} \left[\left(3 - \frac{g}{e}\right) K - \left[3 + \left(\frac{g}{e}\right)^2 \right] (K - E) \right] \dots \dots \dots (10)$$

$$I_A = \frac{2}{3\pi \left(1 - \frac{g}{e}\right)} \left[\left(1 - 3\frac{g}{e}\right) K + 4 \frac{g}{e} (K - E) \right] \dots \dots \dots (11)$$

Härledningen av lösningen av dessa integraler I_R och I_A vid punktanläggning, där exponenten är $3/2$, utvecklas närmare i ett särskilt tillägg.

Regler för användning av funktionerna I_R och I_A .

Om antalet rullkroppar i lagret är n och deras reaktionsvinkel eller tryckriktning i förhållande till ett plan vinkelrätt mot lagrets axel är α samt största belastningen på rullkropparna är P , gäller:

för lagrets radialbelastning R

$$R = P n \cos \alpha I_R \dots\dots\dots (12)$$

för lagrets axialbelastning A

$$A = P n \sin \alpha I_A \dots\dots\dots (13)$$

Härav följer att:

$$\operatorname{tg} \alpha \frac{R}{A} = \frac{I_R}{I_A} \dots\dots\dots (14)$$

För den praktiska användningen av ekvationerna 12, 13 och 14 erfordras nu, att tabeller finnas tillgängliga över radial- och axialintegralerna I_R och I_A samt förhållandet mellan dessa $\frac{I_R}{I_A}$ som funktioner av ett gemensamt argument, t. e. kvantiteten $\frac{g}{e}$ eller den från denna härledda hjälpvariabeln k^2 för de elliptiska integralerna. Tabellerna beräknas enligt formlerna 4 t. o. m. 11.

Ett enkelt fall föreligger när man känner axial- och radialbelastningarna A och R för ett enkelradigt lager och lagrets reaktionsvinkel α , samt vill beräkna maximibelastningen på rullkropparna. Av ekvation 14 följer, att även förhållandet mellan axial- och radialintegralen är givet. Med tillhjälp av tabellen finner man värdena på motsvarande axial- eller radialintegral, vilka man sedan kan insätta i endera av ekvationerna 12 eller 13. Man erhåller således, om man känner antalet rullkroppar n , ur dessa ekvationer belastningen P på den mest ansträngda rullkroppen.

Härmed har man det sökta sambandet mellan lagrets yttre och inre belastningar.

Samtidigt känner man enligt ekv. 1 b och tabell 1 även belastningsfördelningen på de övriga rullkropparna samt hur stor del av omkretsen, som belastas.

I diagrammen fig. 2, 3 och 4 har uppritats resp. radialintegralen, axialintegralen och förhållandet mellan dessa, som funktioner av hjälpvariablerna k^2

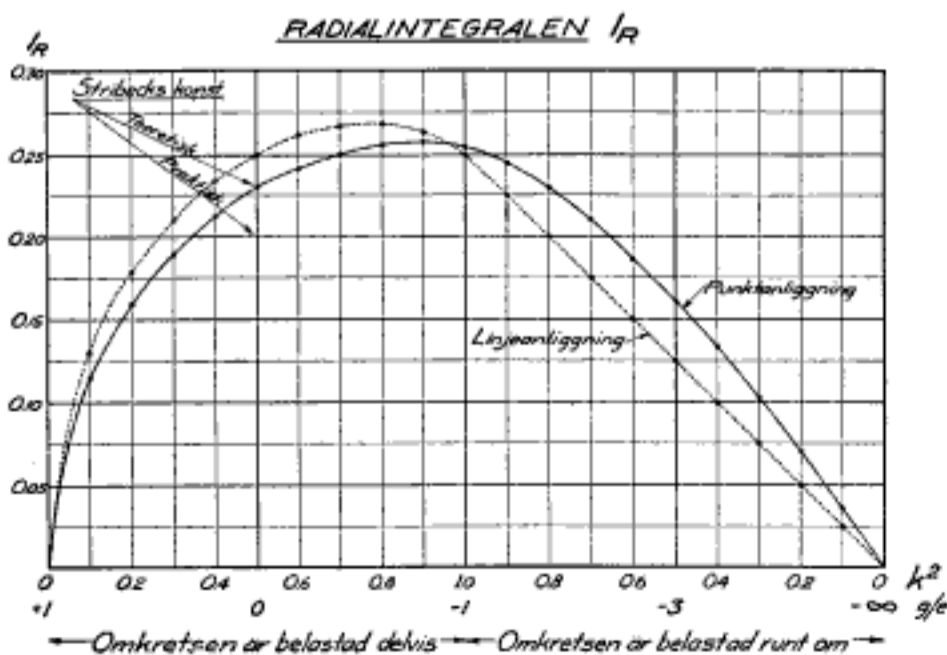


Fig. 2.

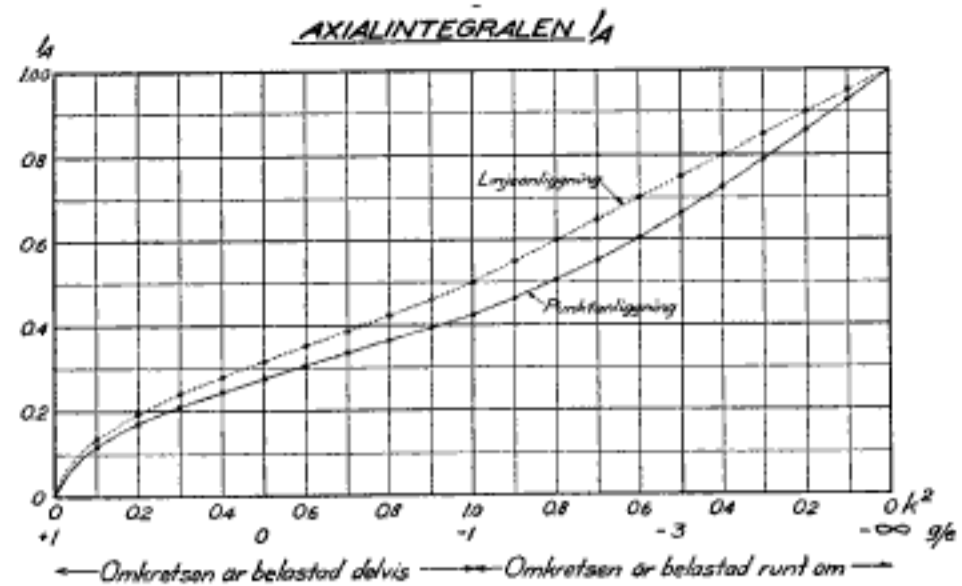


Fig. 3.

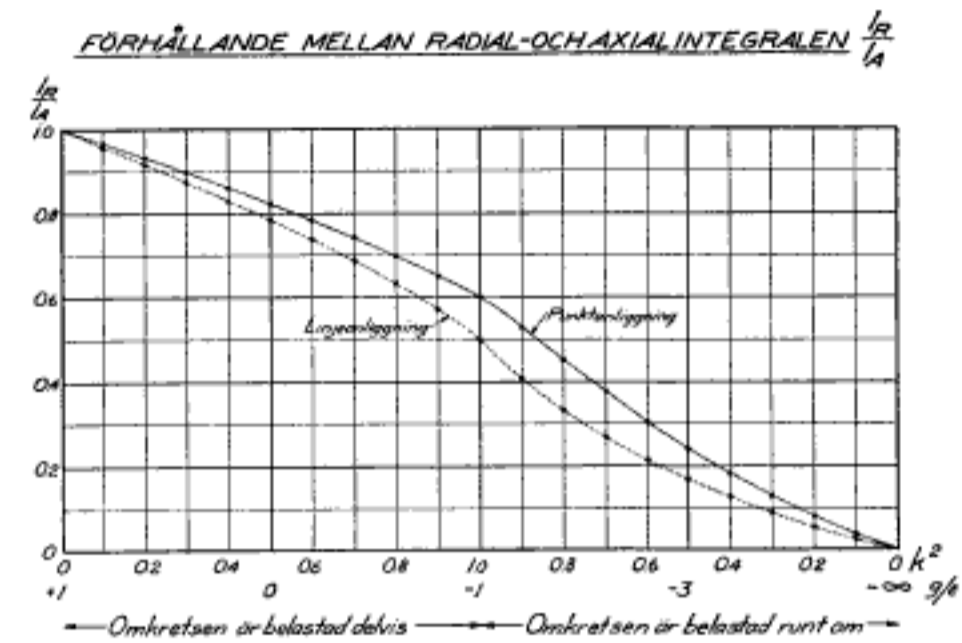


Fig. 4.

eller g/e för såväl linjeanläggning som för punktanläggning. Samtliga dessa värden äro sammanställda i tabell 1.

I diagram fig. 5 ha radial- och axialintegralerna uppritats som funktioner av förhållandet mellan dem $= I_R/I_A$, och i fig. 6 I_R som funktion av I_A .

Tabell 1.

Förhållande mellan glapp och excentricitet $\frac{g}{e} = \cos \phi_1$	Omkretsen belastad delvis							
	Del av omkretsen belastad $\frac{\pi}{\pi} = \frac{\phi_1}{\pi}$	Legendre's modul för de elliptiska integralerna $k^2 = \frac{1-\frac{g}{e}}{2}$	Linjeanläggning			Punktanläggning		
			I_R ekv. (4)	I_A ekv. (5)	$\frac{I_R}{I_A}$	I_R ekv. (8)	I_A ekv. (9)	$\frac{I_R}{I_A}$
1.0	0.0000	0.0	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	1.0000
0.8	0.2048	0.1	0.1301	0.1356	0.9594	0.1156	0.1196	0.9668
0.6	0.2952	0.2	0.1780	0.1939	0.9180	0.1590	0.1707	0.9316
0.4	0.3690	0.3	0.2103	0.2402	0.8753	0.1892	0.2109	0.8971
0.2	0.4359	0.4	0.2335	0.2809	0.8312	0.2117	0.2461	0.8603
0	0.5000	0.5	0.2500	0.3183	0.7854	0.2288	0.2782	0.8225
-0.2	0.5641	0.6	0.2610	0.3539	0.7375	0.2416	0.3066	0.7880
-0.4	0.6310	0.7	0.2670	0.3887	0.6871	0.2505	0.3373	0.7488
-0.6	0.7048	0.8	0.2680	0.4235	0.6329	0.2559	0.3658	0.6996
-0.8	0.7952	0.9	0.2633	0.4595	0.5730	0.2576	0.3945	0.6529
-1.0	1.0000	1.0	0.2500	0.5000	0.5000	0.2546	0.4244	0.6000

Fortsättning $\frac{g}{e}$	Omkretsen belastad runt om							
	Minsta hoptryckning av rullkropparna förhåll till största $\frac{1-\frac{g}{e}}{2}$	Legendre's modul för de elliptiska integralerna $k^2 = \frac{1-\frac{g}{e}}{2}$	Linjeanläggning			Punktanläggning		
			I_R ekv. (6)	I_A ekv. (7)	$\frac{I_R}{I_A}$	I_R ekv. (10)	I_A ekv. (11)	$\frac{I_R}{I_A}$
-1.0	0.0	1.0	0.2500	0.5000	0.5000	0.2546	0.4244	0.6000
-1.222	0.1	0.9	0.2250	0.5500	0.4091	0.2443	0.4611	0.5299
-1.5	0.2	0.8	0.2000	0.6000	0.3333	0.2289	0.5044	0.4538
-1.857	0.3	0.7	0.1750	0.6500	0.2692	0.2096	0.5530	0.3791
-2.333	0.4	0.6	0.1500	0.7000	0.2143	0.1871	0.6060	0.3088
-3.0	0.5	0.5	0.1250	0.7500	0.1667	0.1618	0.6631	0.2440
-4.0	0.6	0.4	0.1000	0.8000	0.1250	0.1339	0.7240	0.1850
-5.667	0.7	0.3	0.0750	0.8500	0.0882	0.1036	0.7882	0.1314
-9.0	0.8	0.2	0.0500	0.9000	0.0556	0.0711	0.8558	0.0831
-19.0	0.9	0.1	0.0250	0.9500	0.0263	0.0365	0.9264	0.0395
-∞	1.0	0.0	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000

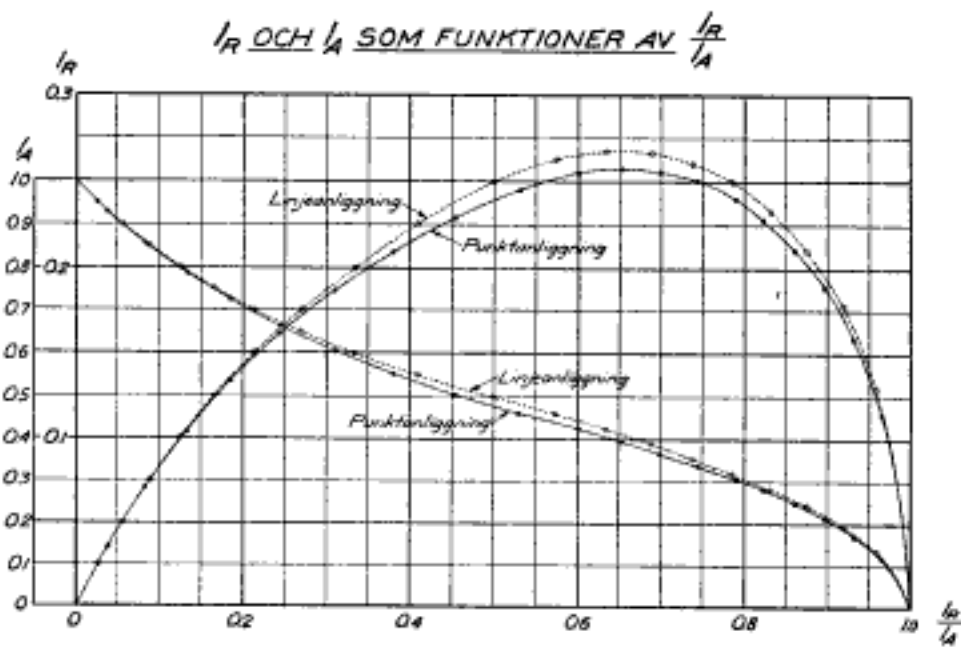


Fig. 5.

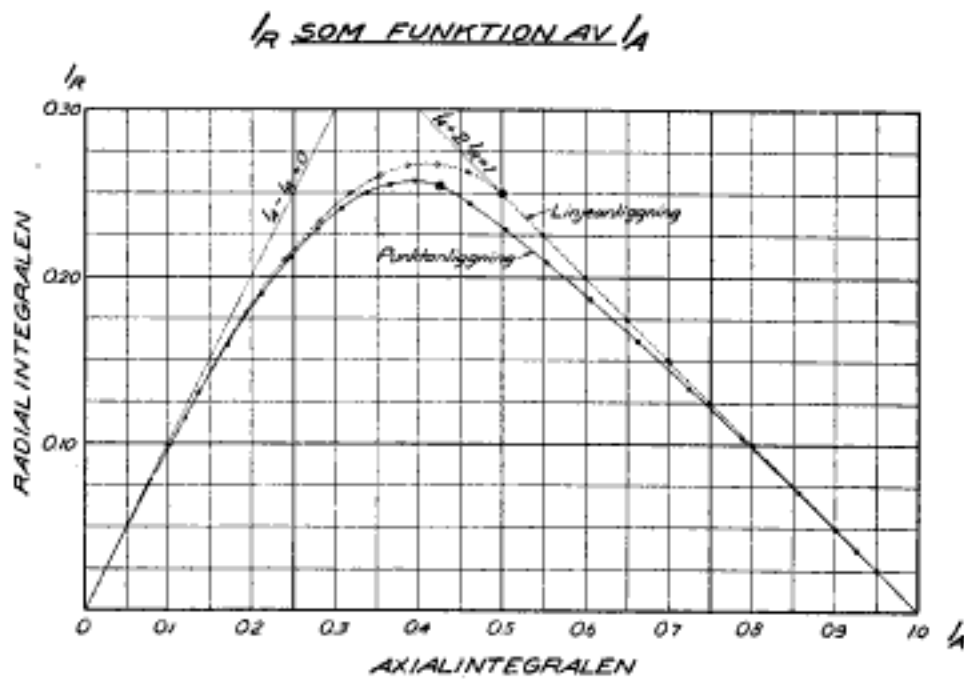


Fig. 6.

De förut nämnda hjälpvariablerna ingå således ej i dessa diagram, vilka torde ha den största praktiska användbarheten.

Exempel.

1) Som ett första exempel på användningen av de funktioner, som här benämnts radial- och axialintegralen, kan väljas normalfallet, då ett radiallyger utan inre positivt eller negativt glapp utsättes för ren radiell belastning. Hjälpvariabeln g/e är här enligt förutsättningen noll och k^2 därför = 0,5. Enligt tabell 1 erhållas värden på I_R , som insatta i ekvation 12 ge:

för linjeanläggning $R = 0,2500 P n \dots (15 a)$

för punktanläggning $R = 0,2288 P n \dots (15 b)$

Dessa uttryck ange sambandet mellan den radiella lagerbelastningen R och maximitrycket på rullkropparna P . Det inverterade värdet av konstanten 0,2288 eller 4,370 är identiskt med den av Stribeck i normalfallet angivna siffran 4,36 å 4,37 för beräkning av maximitrycket. Den av Stribeck föreslagna praktiska siffran 5, som numera är i allmänt bruk, skulle med analogt skrivsätt motsvara:

$R = 0,2000 P n \dots (15 c)$

Konstanten 0,2000 visar sig enligt diagram fig. 2 kunna vara den teoretiskt riktiga vid vissa belastningsfall, t. e. för glappa lager, vid vilka g/e är ungefär 0,48 vid linjeanläggning och ungefär 0,31 vid punktanläggning.

Den mot $I_R = 0,2288$ svarande axialintegralen $I_A = 0,2782$, dvs. = 1,2158 I_R överensstämmer med den av Stribeck i normalfallet angivna uppgiften, att summan av rullkropparnas belastningar är 1,21

å 1,22 gånger så stor som summan av deras nyttiga last (i radiell riktning).

2) Som ett andra räkneexempel väljes ett koniskt rullager 30208, som har linjeanläggning i innersringen och punktanläggning i yttersringen. Reaktionsvinkeln α är bestämd av konstruktionen, som ger $\text{tg } \alpha = 0,25$. Lagret antages i ett visst fall belastat med lika stora radial- och axialtryck, dvs. $R/A = 1$. Av ekv. 14 följer då, att förhållandet $I_R/I_A = 0,25$.

Av fig. 5 eller genom interpolering i tabell 1 framgår, att den motsvarande radialintegralen I_R blir nästan densamma för linje- som för punktanläggning eller ungefär 0,167 resp. 0,165. Sambandet mellan den radiella komponenten av lagerbelastningen R och maximirulltrycket P blir således enligt ekv. 12:

$R = 0,166 P n \cos \alpha.$

Beräkningen av maximalrulltrycket kan på analogt sätt även utföras enligt ekv. 13 med tillhjälp av axialintegralen I_A . Endast det ena av dessa två beräkningssätt behöver emellertid tillgripas, då slutresultatet blir detsamma.

Uppsöker man i tabell 1 eller i fig. 4 vid detta belastningsfall hjälpvariablerna k^2 och g/e finner man, att k^2 , som här är identiskt med $1 - \frac{\delta_{min}}{\delta_0}$ (emedan omkretsen belastas runt om) blir 0,634 för linjeanläggning och 0,508 för punktanläggning, samt att g/e blir - 3,02 resp. - 3,94. Härav framgår, att det förefinnes skillnader i belastningsfördelningen inom lagret vid linjeanläggning jämfört med punktanläggning, samt mellan ringförskjutningarna, trots att, som nyss påpekades, maximirullbelastningen i dessa två fall blir praktiskt taget densamma.

Praktiska tillämpningar av funktionerna I_R och I_A .

Vid användning av radial- och axialintegralerna för beräkning på lager av varierande typer måste hänsyn tagas till de enskilda lagertypernas egenheter.

För ett dubbelradigt vinkelkontaktlager t. e. utsatt för ren radialbelastning representerar I_A endast balanserade axialspänningar mellan de två raderna och ej någon yttre axialbelastning.

Vid ett lager med glapp, som utsättes för ren radialbelastning, bestämmas funktionerna I_R och I_A av hjälpvariabeln g/e . I denna ingår glappet g som en praktiskt mätbar, av radialbelastningen oberoende kvantitet, medan excentriciteten e däremot är beroende av deformationen på grund av maximibelastningen på rullkropparna, vilken t. e. antages vara okänd. I ett dylikt fall kommer man till den korrekta lösningen genom upprepad approximation med utgående t. e. från den Stribeckska praktiska standardformeln ekv. 15c. Beräkningen av sambandet mellan deformation och belastning på rullkropparna utföres på känt sätt enligt Hertz formler, vilka ej behöva beröras vidare här.

Vid enkelradiga spårkullager gälla ej förutsättningarna för funktionerna I_R och I_A , emedan hänsyn måste tagas till att reaktionsvinkeln α , särskilt vid lager utan initialglapp, varierar såväl med belastningen som från den ena rullkroppen till den andra. Utan att närmare ingå på detta problem, kan här påpekas, att funktionerna I_R och I_A kunna an-

vändas med god approximation genom att antaga vinkeln α vara lika från den ena rullkroppen till den andra ehuru olika för varje enskilt yttre belastningsfall för lagret.

Oavsett lagertypen kan vidare för praktiskt bruk angivas approximativa, linjära samband mellan I_R och I_A , gällande i närheten av ytterlighetsfallen. Dessa fall äro: belastning av omkretsen på en enda punkt resp. lika belastning runt om.

De approximativa sambanden representeras av tangenterna i de två nollpunkterna till kurvan för I_R i fig. 6, vilka tangenter äro gemensamma för linje- och punktanliggning. De äro:

vid stort glapp i förhållande till radiallyst:

$I_A - I_R = 0$ eller efter insättning av ekv. 12 och 13:

$$\frac{A}{\sin \alpha} - \frac{R}{\cos \alpha} = 0 \dots\dots\dots (16)$$

samt vid övervägande axialtryck eller grepp:

$I_A + 2 I_R = 1$ eller efter insättning av ekv. 12 och 13:

$$\frac{A}{\sin \alpha} + \frac{2R}{\cos \alpha} = P \cdot n \dots\dots\dots (17),$$

vilket senare uttryck dessutom gäller exakt vid linjeanliggning så länge omkretsen är belastad runt om.

Tillägg visande härledningen av integralerna I_R och I_A .

Litteraturförteckning.

Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, herausgegeben von RICHARD V. MISES. Erster Teil, sid. 129—141. (Elliptische Funktionen und Integrale von K. LÖWNER.) Verlag Fr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1925.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Band II, 2, Heft 2/3. (Elliptische Funktionen von R. FRICKE.) Verlag B. G. Teubner, Leipzig, 1913.

Funktionstabellen mit Formeln und Kurven, von E. JAHNKE und F. EMDE. Verlag B. G. Teubner, Leipzig, 1909.

Integralrechnung von LUDWIG KIEPERT, Band I, sid. 320—339. Verlag Helwing, Hannover, 1926 (14:e upplagan).

Elliptiska integraler.

De fullständiga elliptiska integralerna av första och andra ordningen, betecknade K och E äro funktioner av ett argument k^2 . Om uttrycket $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}$ betecknas med Δ är enligt definitionen (LEGENDRE'S):

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\Delta}$$

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta dv.$$

Numeriska värden av dessa funktioner K och E sökas i tabeller t. e. "Jahnke & Emde, Funktionstabellen" för givna värden på argumentet k^2 .

De integraler vilka behöva lösas vid beräkning av belastningsfördelningen inom kull- och rullager med punktkontakt, och vilka innehålla jämna potenser av sinus och cosinus i täljaren samtidigt med Δ i nämnaren visa sig vara elliptiska och kunna uttryckas som funktioner av de fullständiga, elliptiska integralerna K och E . För de viktigare grundtyperna, som senare återkomma, är det praktiskt att först härleda nedanstående lösningar:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 v}{\Delta} dv = \frac{K-E}{k^2}; \text{ limes för } k=0 \text{ är } \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 v}{\Delta} dv = \frac{1}{3k^2} \left[2(1+k^2) \frac{K-E}{k^2} - K \right]; \text{ limes för } k=0 \text{ är } \frac{3\pi}{16},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 v}{\Delta} dv = \frac{1}{15k^4} \left[\left\{ 8(1+k^2)^2 - 9k^2 \right\} \frac{K-E}{k^2} - 4(1+k^2)K \right],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 v}{\Delta} dv = K - \frac{K-E}{k^2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 v}{\Delta} dv = \frac{1}{3k^2} \left[(3k^2-1)K - 2(2k^2-1) \frac{K-E}{k^2} \right].$$

$$\left(\text{För små värden på } k \text{ är } \frac{K-E}{k^2} = \frac{\pi}{4} \left[1 + \frac{3k^2}{8} + \frac{15k^4}{64} + \dots \right] \right).$$

Lösning av radialintegralen I_R .

Radialintegralen I_R enligt ekv. 2 blir efter insättande av uttrycket för deformationen enligt ekv. 1b:

$$I_R = \frac{1}{\pi} \int \left[1 - \frac{(1 - \cos \varphi)}{1 - \frac{g}{e}} \right]^m \cos \varphi d\varphi.$$

När omkretsen endast är belastad delvis löses integralen I_R på följande sätt. Man sätter för att eliminera den variabla, övre integrationsgränsen φ_1

$$\frac{(1 - \cos \varphi)}{1 - \frac{g}{e}} = \sin^2 v \text{ samt } \frac{1 - \frac{g}{e}}{2} = k^2, \text{ varvid } k^2$$

blir LEGENDRE'S modul för de fullständiga elliptiska integralerna.

Av substitutionen följer att integrationsområdet för den nya variabeln v blir från 0 till $\frac{\pi}{2}$. Vidare finner man att

$$\cos \varphi = 1 - 2k^2 \sin^2 v \text{ samt } d\varphi = \frac{2k \cos v dv}{\Delta} \text{ om}$$

såsom förut Δ är lika med $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}$. Radialintegralen övergår således till:

$$I_R = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - 2k^2 \sin^2 v) \cos^{2m+1} v dv}{\Delta},$$

varest exponenten $2m+1$ är lika med 3 för linjeanliggning och 4 för punktanliggning. För linjeanliggning kan emellertid integralen lösas utan ovan nämnda substitution. I fortsättningen behandlas endast punktanliggning, dvs. exponenten lika med 4. Integralen kan då uppdelas i flera termer:

$$I_R = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\Delta} [1 - 2(1+k^2)\sin^2 v + (1+4k^2)\sin^4 v - 2k^2\sin^6 v].$$

De motsvarande delintegralerna kunna samtliga hänföras till någon av de grundtyper, för vilka lösningarna förut angivits. Efter att dessa ha insatts och uttrycket hyfsats erhålles såsom slutresultat

$$I_R = \frac{2}{\pi} \frac{1}{5k} \left[(1+k^2)K - 2(1-k^2+k^4) \frac{K-E}{k^2} \right],$$

Genom att här insätta $k^2 = \frac{1-\frac{g}{e}}{2}$ erhålles slutligen det uttryck, som angivits som ekvation 8.

När omkretsen är belastad runt om är övre integrationsgränsen konstant $= \pi$. Här är det därför tillräckligt att som ny variabel införa halva vinkeln. Som modul för de elliptiska integralerna tages det inverterade värdet av föregående modul. Alltså gäller:

$$\varphi = 2v \text{ samt } \frac{2}{1-\frac{g}{e}} = k^2.$$

Radialintegralen övergår till:

$$I_R = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2\sin^2 v)(1-k^2\sin^2 v)^m dv.$$

För punktanliggning, som behandlas här, är $m = 3/2$. Integralen uppdelas nu i termer

$$I_R = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\Delta} [1 - 2(1+k^2)\sin^2 v + k^2(4+k^2)\sin^4 v - 2k^4\sin^6 v],$$

vilka efter insättande av lösningarna på grundtyperna ger:

$$I_R = \frac{2}{5\pi} \left[(1+k^2)K - 2(1-k^2+k^4) \frac{K-E}{k^2} \right].$$

Om $k^2 = \frac{2}{1-\frac{g}{c}}$ insättes häri erhålles såsom slut-

resultat ekvation 10.

Lösning av axialintegralen I_A .

Axialintegralen enligt ekvation 3 blir efter insättande av ekvation 1b

$$I_A = \frac{1}{\pi} \int \left[1 - \frac{(1-\cos\varphi)}{1-\frac{g}{e}} \right]^m d\varphi.$$

Samma substitutioner göras här som vid lösandet av radialintegralen.

När omkretsen endast är belastad delvis blir således:

$$\frac{(1-\cos\varphi)}{1-\frac{g}{e}} = \sin^2 v; \text{ samt } \frac{1-\frac{g}{e}}{2} = k^2.$$

Axialintegralen övergår till:

$$I_A = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2m+1} v}{\Delta} dv,$$

där såsom förut exponenten $2m+1$ blir 3 för linjeanliggning och 4 för punktanliggning. Endast det senare fallet behandlas. Integralen blir enligt en av de i det föregående givna grundtyperna:

$$I_A = \frac{2}{3k} \left[(3k^2-1)K - 2(2k^2-1) \frac{K-E}{k^2} \right],$$

varur ekvation 9 erhållits efter insättande av

$$k^2 = \frac{1-\frac{g}{e}}{2}.$$

När omkretsen är belastad runt om införes, på samma sätt som vid radialintegralen, halva vinkeln som variabel, dvs.

$$\varphi = 2v \text{ samt } \frac{2}{1-\frac{g}{e}} = k^2.$$

Axialintegralen övergår till:

$$I_A = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-k^2\sin^2 v)^m dv.$$

För punktanliggning, där $m = 3/2$, blir:

$$I_A = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\Delta} [1 - 2k^2\sin^2 v + k^4\sin^4 v],$$

vilket på samma sätt som förut med hänvisning till de olika grundtyperna ger:

$$I_A = \frac{2}{3\pi} [(3-k^2)K - 2(2-k^2)(K-E)].$$

Efter insättning av $k^2 = \frac{2}{1-\frac{g}{e}}$ erhålles slutligen

ekvation 11.

EN ANALYS AV PROV MED STÄLLINOR.

Av ingenjör JOEL BJÖRKLUND, Västerås.

(Forts. från sid. 89.)

G. Förslag till funktion mellan tillåten dragspänning och $\frac{D}{\delta}$.

Av fig. 9 och 10 framgår, att man vid en konstant livslängd kan tillåta avsevärt högre dragspänningar

än hittills brukligt, om diameterförhållandet väljes stort, och man kommer i vissa fall till så höga värden, att vårt på "säkerhetsfaktorer" inställda tekniska sinne reagerar mot tillämpningen av dylika värden. Man måste nog också i sanningens namn medgiva, att kostnaden för linor i allmänhet är en mycket ringa